

©Быков А. А., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-259-282

УДК 517.228.4

Численное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с внутренним переходным слоем

Быков А. А.

получена 20 мая 2016

Аннотация. Выведены уравнения эволюции решения типа контрастной структуры обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (ОКПП) с малым параметром при старших производных. Уравнение ОКПП относится к классу псевдопараболических уравнений и описывает разнообразные процессы в физике, химии, биологии, в частности процессы генерации магнитного поля в турбулентной среде, движение фронта концентрации носителей в полупроводниках. Найдена форма и скорость перемещения внутреннего переходного слоя (ВПС). Построен и строго обоснован алгоритм адаптивной сетки (АС) для эффективного численного решения начально-краевой задачи для уравнения ОКПП с движущимся ВПС. Построен алгоритм АС для случая наличия особой точки первого рода, т.е. точки с нулевой скоростью дрейфа ВПС в первом порядке формального асимптотического ряда. Сформулированы достаточные условия того, что ВПС пересекает особую точку за конечное время. Построен алгоритм АС для случая наличия особой точки второго рода, т.е. точки с формально бесконечно большой скоростью дрейфа ВПС в первом порядке. Дано обоснование на основе метода дифференциальных неравенств, построены верхнее и нижнее решение, представлены результаты численного счета.

Ключевые слова: сингулярно возмущённое уравнение, внутренний переходный слой, метод разностных схем, асимптотическое разложение

Для цитирования: Быков А. А., "Численное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с внутренним переходным слоем", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23:3** (2016), 259–282.

Об авторах:

Быков Алексей Александрович, orcid.org/0000-0002-9399-7115,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математики физического факультета,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Ленинские Горы, 1.
E-mail: abkov@yandex.ru

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 16-01-00690-а.

1. Введение

Мы рассматриваем проблему численного решения начально краевой задачи для обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (ОКПП) [1], [2], [3], [4], [5],

$$(u - u_{xx})_t + Vu_x = u_{xx} - f(u, x) \quad (1)$$

в том практически важном случае, когда решение имеет вид контрастной структуры (КС). Также рассматриваются некоторые более простые модели, в частности уравнение реакции–диффузии (РД) в неоднородной среде [6]

$$u_t + Vu_x = \kappa u_{xx} - f(u, x). \quad (2)$$

Уравнения РД и ОКПП относятся к классу квазилинейных уравнений соответственно параболического и псевдопараболического типа. Задача для уравнений (1) или (2) ставится на отрезке $[a, b]$ с граничными условиями $u_x(a) = u^{(a)}(t)$, $u_x(b) = u^{(b)}(t)$ и начальными условиями $u(x, 0) = u^{(0)}(x)$.

Уравнение (2) описывает процесс генерации магнитных полей в турбулентной среде [7] в теории галактического динамо. В этом случае u определяет напряженность магнитного поля, причем плотность источников антисимметрична, $f(-u, x) = -f(u, x)$, эта функция имеет три корня, положение которых зависит от координат, в том числе корень $u = 0$. Уравнение (2) описывает также процесс распространения пламени типа бегущей волны при горении и взрыве [8]. Автомодельные решения типа бегущей волны возникают в теории ударных волн [9], а также для описания нестационарного процесса фазового перехода [10]. В случае, когда $f(u)$ – кубическая парабола, уравнение (2) описывает процессы в цепных химических реакциях и носит название уравнения Семенова [10]. В [11] дан обзор решений вида бегущей волны для уравнения Ходжкина–Хаксли, которое описывает [12] процесс распространения импульсов по нервным волокнам и также имеет вид (2) со специальным образом выбранной функцией плотности источников. Уравнение РД и решения типа вида бегущей волны появляются в задаче динамики популяций (например, модель хищник–жертва), эволюции пораженных клеток в живом организме, цитокининов при атеросклерозе [13]. Уравнение (2) в биологических приложениях называют также уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова, так как впервые оно было выведено в работе [14].

В [1], [2], [3] приведены примеры физических процессов, которые описываются уравнениями, более сложными, чем уравнение РД, в том числе обобщенным уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова, содержащим производные смешанного типа третьего порядка. К числу таковых относятся квазистационарный процесс переноса зарядов в двухкомпонентной квазилинейной полупроводниковой плазме, нестационарные процессы в униполярном полупроводнике во внешнем магнитном поле, малые колебания слабопроводящей жидкости во внешнем магнитном поле. Уравнение ОКПП описывает, в частности, процесс диффузии носителей заряда в полупроводниках в случае, когда среда обладает отрицательной дифференциальной проводимостью [4], [5].

Структура решения уравнений (1) и (2), как почти для любого нелинейного уравнения, может быть сколь угодно сложна. Нас интересует только широко распространенный на практике класс решений типа так называемой контрастной структуры.

Решения типа КС характеризуются наличием больших областей (пятен), в которых u близко к одному из устойчивых состояний, разделенных узкими областями, в которых происходит переход от одного устойчивого состояния к другому через неустойчивое состояние. Например, если

$$f(u, x) = f_0(u, x) \prod_{j=1}^{2J+1} (u - U_j(x)),$$

$f_0(u, x) > 0$ и непрерывна на $(-\infty, +\infty) \times [a, b]$, $U_j(x) > 0$, $U_{j-1}(x) < U_j(x)$, то имеется $J + 1$ устойчивых состояний, $u \simeq U_{2j-1}$, причем $f_u(U_j, x) > 0$, разделенных J неустойчивыми состояниями, $u \simeq U_{2j}$, для которых $f_u(U_j, x) < 0$.

Между пятнами КС образуется узкий слой, в пределах которого происходит переход от одного из устойчивых состояний к другому, сопровождающийся переходом через неустойчивое состояние. Этот слой называют внутренним переходным слоем (ВПС). Мы предполагаем, что толщина ВПС много меньше размера области $D = [a, b]$. На границах D образуются узкие пограничные слои, которые в данной работе не рассматриваются. Для создания условий, при которых имеется решение типа КС, мы введем в уравнения (1) и (2) малый параметр $\varepsilon > 0$ при частных производных, при достаточно малом значении которого решение типа КС существует. Параметр ε , как будет показано далее, пропорционален толщине ВПС. Начально-краевая задача для уравнения (2) примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t = \varepsilon^2 \kappa u_{xx} - f(u, x), & a < x < b, \quad 0 < t < T, \\ u_x(a, t, \varepsilon) = 0, \quad u_x(b, t, \varepsilon) = 0, \quad u(x, 0, \varepsilon) = u^{(0)}(x, \varepsilon). \end{cases} \quad (3)$$

В неоднородных средах ВПС почти всегда перемещается. Дрейф ВПС определяется величиной асимметрии $B(x) = \int_{U_1(x)}^{U_{2J+1}(x)} f(u, x) du$. При нулевой асимметрии, $B(x) = 0$, скорость дрейфа определяется градиентом функции плотности источников U_{jx} , f_u , f_x . В данной работе мы рассматриваем именно последний случай, когда дрейф асимметрии отсутствует, и перемещение ВПС обусловлено градиентным дрейфом. Мы найдем асимптотическое выражение скорости дрейфа при достаточно слабых условиях на функцию $f(u, x)$. Заметим, что в ряде работ [15], [16] найдены точные выражения скорости дрейфа квазиволны для случая некоторых специально подобранных функций $f(u)$. В [17] получено выражение скорости дрейфа и показано, что при сохранении знака скорости фронт ВПС преодолевает промежуток за конечное время. Мы обобщим этот результат на случай уравнения ОКПП и сформулируем метод, позволяющий численно с гарантированной точностью и за приемлемое время счета находить решение задачи.

Во всех этих случаях особое значение для приложений имеет не только аналитическое описание на основе асимптотических методов, дающих приближение к точному решению с гарантированной точностью при условии плавного изменения параметров среды в пространстве, но также и точное и эффективное численное решение начально-краевой задачи с внутренними переходными слоями.

Наша цель состоит в

- построении формального асимптотического ряда для уравнений (1) и (2) в случае, когда толщина ВПС много меньше диаметра области D ,
- построении верхнего и нижнего решения, строгого обоснования метода асимптотического разложения на основе метода дифференциальных неравенств,

- разработке численного алгоритма приближенного решения этих уравнений с гарантированной точностью и за приемлемое время.

Мы построим нулевой, первый и второй члены асимптотического ряда по степеням ε . Мы покажем, что частичные суммы этого ряда дают приближение решения уравнения по невязке с заданной точностью.

Мы построим также алгоритм, основанный на использовании метода адаптивной сетки (АС) для численного решения (1) и (2). Метод АС основан на сгущении сетки в окрестности области с большим градиентом решения. Метод АС для решения начально-краевых задач для эволюционных (параболического типа) уравнений предложен и детально проработан достаточно давно [18]. Проблема генерации адаптивной сетки имеет как абстрактное решение, безотносительно к классу рассматриваемых начально-краевых задач, так и конкретные решения для определенных классов уравнений, в которых можно сформулировать алгоритм предсказания положения области с большим градиентом [19]. Например, таковы некоторые задачи динамики жидкости, в которых предсказать положение области с большим градиентом можно, опираясь на полную или частично заданную информацию о поле скоростей и давлений (например, [20]).

Метод АС широко применяется для численного решения задач реакции-диффузии, возникающих в различных приложениях. В [21] метод АС применен для решения задачи о распространении ракового образования мозговой ткани. В [22] метод использован для численного моделирования процесса радиационной диффузии светового пучка в мутной среде. В [23] метод АС применен для решения уравнений мелкой воды, описывающих распространение фронта волны в случае, когда толщина слоя жидкости достаточно мала, так что система уравнений Навье–Стокса динамики жидкости упрощается за счет пренебрежения эффектами, связанными с вертикальными потоками. Метод АС, разработанный для решения уравнения ОКПП, применим также для решения задач с движущимися внутренними переходными слоями, возникающими при моделировании пучков заряженных частиц в электронных приборах с распределенным взаимодействием.

Суть метода АС состоит в том, что малые ячейки сетки размещаются в области больших градиентов решения. В нашей задаче, естественно, это область ВПС. Внутри пятен ВПС шаг сетки может быть значительно больше.

Для точного предсказания положения ВПС мы используем метод асимптотического разложения решения в ряд по степеням малого параметра. Уравнение (3) с малым параметром относится к классу сингулярно возмущенных. Это означает, что при $\varepsilon = 0$ оно из дифференциального превращается в алгебраическое, причем это алгебраическое уравнение имеет несколько решений. Из этих решений (соответствующих устойчивым положениям равновесия) мы сконструируем так называемую регулярную функцию нулевого порядка. Регулярная функция нулевого порядка претерпевает разрыв в точках ВПС.

Затем мы построим функции переходного слоя нулевого порядка и пограничные функции нулевого порядка, которые складываются с регулярной функцией нулевого порядка и дают в результате единое гладкое приближение по невязке к точному решению во всей области, удовлетворяющее также граничным условиям. Регулярные функции и функции переходного слоя зависят от времени, причем эту зависимость

можно охарактеризовать как дрейф ВПС. Мы найдем также скорость дрейфа ВПС в нулевом порядке, которая также является приближением к точному значению.

Затем мы последовательно построим первый и последующие члены асимптотического ряда по степеням малого параметра. Скорость дрейфа ВПС также будет представлена в виде ряда по степеням малого параметра, $W(x) = W^{(0*)}(x) + \varepsilon W^{(1*)}(x) + \dots$. Для нестационарных задач метод асимптотических рядов ранее использовался для построения решений уравнения типа реакция–диффузия с движущимся фронтом типа ступеньки [17], [24], [25] и всплеска [26].

Мы рассматриваем случай, когда скорость дрейфа ВПС нулевого порядка положительна на промежутке (a, b) . Таким образом, ВПС проходит весь отрезок (a, b) за конечное время. Мы строим также модификации метода, которые позволяют дать описание случаев, когда скорость дрейфа в нулевом порядке обращается в нуль или в бесконечность.

2. Построение формальной асимптотики

2.1. Условия формирования ВПС

Предположим, что толщина ВПС много меньше диаметра области D , который в одномерной по пространственной координате задаче равен $b - a$. Введем в уравнение (1) малый параметр ε , который пропорционален отношению толщины ВПС к диаметру области D . Мы выберем такие значения показателя степени при малом параметре в различных слагаемых уравнения (1), при которых эффекты классической диффузии u_{xx} и обобщенного диффузионного члена u_{xxt} будут одного порядка:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t - \varepsilon^4 \mu u_{xxt} = \varepsilon^2 \kappa u_{xx} - f(u, x), & a < x < b, \quad 0 < t < T, \\ u_x(a, t, \varepsilon) = 0, \quad u_x(b, t, \varepsilon) = 0, \quad u(x, 0, \varepsilon) = u^{(0)}(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (4)$$

$u(x, t, \varepsilon) \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$, $G = (a, b) \times (0, T)$, $\mu > 0$, $\kappa > 0$. Теоретические результаты будут верны в том случае, когда величина параметра ε не превосходит некоторого предельно допустимого значения, поэтому мы рассматриваем значения $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Мы не рассматриваем в данной работе зависимость $f(u, x)$ от ε , так как намереваемся исследовать только эффекты, связанные с поведением ВПС в неоднородной среде.

Сформулируем условия, которые мы будем предполагать выполненными при построении формального асимптотического ряда для уравнения (1) и обеспечивающие существование решения уравнения (4) типа КС. Пусть

[У1] Функция $f(u, x)$ непрерывно дифференцируема в области G , причем каждая производная функции f , которая появляется в выражениях для членов асимптотического ряда, непрерывна и равномерно ограничена в G .

[У2] Для любого $x \in [a, b]$ уравнение $f(u, x) = 0$ имеет ровно три корня: $u_1 = \phi^{(-)}(x)$, $u_2 = \phi^{(0)}(x)$, $u_3 = \phi^{(+)}(x)$, причем $\phi^{(-)}(x) < \phi^{(0)}(x) < \phi^{(+)}(x)$. Все корни простые, причем $f_u(\phi^{(-)}(x), x) > 0$, $f_u(\phi^{(0)}(x), x) < 0$, $f_u(\phi^{(+)}(x), x) > 0$.

[У3] На $[a, b]$ выполнено условие баланса $\mathcal{B}(x) = 0$, где $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}^{(-)}(x) + \mathcal{B}^{(+)}(x)$,

$$\mathcal{B}^{(-)}(x) = \int_{\phi^{(-)}(x)}^{\phi^{(0)}(x)} f(u, x) du, \quad \mathcal{B}^{(+)}(x) = \int_{\phi^{(0)}(x)}^{\phi^{(+)}(x)} f(u, x) du.$$

Для построения асимптотического ряда, сходящегося к точному решению задачи, используем метод сшивания асимптотических представлений решения в области отрицательного и положительного пятен. В данной работе мы рассмотрим КС,

включающую ровно два пятна, разделенных одним ВПС, но отметим, что метод пригоден для любого числа ВПС.

2.2. Асимптотические ряды

Будем называть "точкой перехода" координату $x^*(t, \varepsilon)$, для которой

$$u(x^*, t, \varepsilon) = \varphi^{(*)}(x^*(t, \varepsilon)).$$

Используем для построения асимптотического ряда методику, разработанную в [17] для уравнения реакции-диффузии. На промежутке $a < x < x^*(t, \varepsilon)$ решение задачи (4) найдем из системы

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t = \varepsilon^4 \mu u_{xxt} + \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u, x), \\ u_x(a, t, \varepsilon) = 0, \quad u(x^*(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \phi^{(0)}(x^*(t, \varepsilon)), \\ u(x, 0, \varepsilon) = u^{(0)}(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (5)$$

а на промежутке $x^*(t, \varepsilon) < x < b$ – из системы

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t = \varepsilon^4 \mu u_{xxt} + \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u, x), \\ u_x(b, t, \varepsilon) = 0, \quad u(x^*(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \phi^{(0)}(x^*(t, \varepsilon)), \\ u(x, 0, \varepsilon) = u^{(0)}(x, \varepsilon). \end{cases} \quad (6)$$

Решения задач (5) и (6) обозначим $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$ соответственно. Частичную сумму асимптотического ряда m -го порядка справа и слева от точки перехода представим в виде

$$u^{(m+)}(x, t, \varepsilon) = \bar{u}^{(m+)}(x, t, \varepsilon) + Q^{(m+)}(\xi, t, \varepsilon) + \Pi_b^{(m)}(\zeta_b, \varepsilon), \quad (7)$$

$$u^{(m-)}(x, t, \varepsilon) = \bar{u}^{(m-)}(x, t, \varepsilon) + Q^{(m-)}(\xi, t, \varepsilon) + \Pi_a^{(m)}(\zeta_a, \varepsilon), \quad (8)$$

где $\bar{u}^{(m\pm)}(x, t, \varepsilon)$ – регулярная часть, $Q^{(m\pm)}(\xi, t, \varepsilon)$ – функции переходного слоя, $\Pi_{a,b}^{(m)}(\zeta_{a,b}, \varepsilon)$ – пограничные функции, ξ, ζ_a, ζ_b – растянутые переменные:

$$\xi = \frac{x - x^*(t, \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \zeta_a = \frac{a - x}{\varepsilon} \leq 0, \quad \zeta_b = \frac{b - x}{\varepsilon} \geq 0. \quad (9)$$

Зависимость $\bar{u}^{(m\pm)}(x, t, \varepsilon)$ от t обусловлена наличием зависимости x^* от t . Каждое слагаемое в (7) и (8) представим в виде частичной суммы асимптотического ряда по степеням ε :

$$\bar{u}^{(m\pm)}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \bar{u}_k^{(\pm)}(x, t), \quad Q^{(m\pm)}(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k Q_k^{(\pm)}(\xi, t), \quad (10)$$

$$\Pi_a^{(m)}(\zeta_a, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \Pi_{a,k}(\zeta_a), \quad \Pi_b^{(m)}(\zeta_b, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \Pi_{b,k}(\zeta_b), \quad (11)$$

причем $x^*(t, \varepsilon) = x^{(m*)}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t W^{(m*)}(x^*, \varepsilon) dt$,

$$dx^{(m*)}(t, \varepsilon)/dt = W^{(m*)}(x^*, \varepsilon), \quad W^{(m*)}(x^*, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k W_k(x^*, \varepsilon), \quad (12)$$

$W_k(x^*, \varepsilon)$ есть регулярная функция ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Используем далее методику, разработанную в [17] для построения асимптотического ряда. Выполним в (4) замену переменной (9) и представим $f(u, x, \varepsilon)$ в виде

$$f(u, x, \varepsilon) = \bar{f}(x, \varepsilon) + Qf(\xi, \varepsilon) + Pf(\zeta, \varepsilon),$$

где

$$\bar{f}(x, \varepsilon) = f(\bar{u}(x, \varepsilon), x, \varepsilon),$$

$$Qf(\xi, t, \varepsilon) = f(\bar{u}(x(\xi), \varepsilon) + Q(\xi, t, \varepsilon), x(\xi), \varepsilon) - f(\bar{u}(x(\xi), \varepsilon), x(\xi), \varepsilon),$$

$$P_\nu f(\zeta_\nu, \varepsilon) = f(\bar{u}(x(\zeta_\nu), \varepsilon) + P_\nu(\zeta_\nu, \varepsilon), x(\zeta_\nu), \varepsilon) - f(\bar{u}(x(\zeta_\nu), \varepsilon), x(\zeta_\nu), \varepsilon),$$

$\nu = a, b$, зависимость от t как от параметра через $\bar{u}(t)$ далее явно не указываем.

Уравнения для определения коэффициентов разложения (10) получим, приравняв по отдельности слагаемые, зависящие от пространственной переменной x , растянутой переменной ξ и растянутых переменных пограничного слоя ζ :

$$\varepsilon^2 k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}(x, \varepsilon) = \bar{f}(x, \varepsilon), \quad (13)$$

$$\left(\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \frac{dx^*}{dt} \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon^2 \mu \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial t} + \varepsilon \mu \frac{dx^*}{dt} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) Q(\xi, t, \varepsilon) = -Qf(\xi, t, \varepsilon). \quad (14)$$

Уравнения для коэффициентов рядов (11) в данной работе не рассматриваются, так как мы строим метод точного и эффективного численного решения задачи с внутренним переходным слоем.

2.3. Вычисление профиля КС и скорости дрейфа ВПС в градиентной среде

Покажем, что в рамках задачи о КС для сбалансированного уравнения ОКПП профиль ВПС можно найти, решив аналитически уравнения нулевого порядка. Регулярную функцию нулевого порядка найдем из уравнения $f(\bar{u}, x) = 0$. В соответствии с [У2], выберем разрывное решение с одной точкой разрыва:

$$\bar{u}_0(x, x^*) = \begin{cases} \bar{u}_0^{(-)}(x) & \text{при } x < x^*, \\ \bar{u}_0^{(+)}(x) & \text{при } x > x^*, \end{cases} \quad \text{где } \begin{cases} \bar{u}_0^{(-)}(x) = \phi^{(-)}(x), \\ \bar{u}_0^{(+)}(x) = \phi^{(+)}(x). \end{cases} \quad (15)$$

При расчете функций ВПС нулевого порядка в этом разделе обозначим $x^* = x^{(0*)}$. Здесь и далее зависимость $x^{(0*)}(t)$ явно не указываем. Функции переходного слоя нулевого порядка найдем из краевых задач

$$\begin{cases} \kappa Q_{0\xi\xi}^{(\pm)} = f(\bar{u}_0^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}, x^*) - f(\bar{u}_0^{(\pm)}(x^*), x^*), \\ Q_0^{(\pm)}(0) + \bar{u}_0^{(\pm)}(x^*) = \phi^{(0)}(x^*), \quad Q_0^{(\pm)}(\pm\infty) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

которые получаем из (14) собиранием слагаемых нулевого порядка относительно ε .

Для выделения единственного решения используем также условия гладкого сопряжения функции $u^{(0\pm)}(\xi) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}(\xi)$ в точке $x^* = x^{(0*)}$. Таким образом, условия сопряжения для функций ВПС можно записать в виде $Q_{0\xi}^{(-)}(0) = Q_{0\xi}^{(+)}(0)$. Понижение порядка в (16) с учетом условия убывания $Q_0^{(\pm)}(\xi)$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$ приводит к уравнениям первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(\pm)}}{d\xi} = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \left(\int_{\varphi^{(\pm)}(x^*)}^{\varphi^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}} f(u, x^*) du \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что $\frac{dQ_0^{(-)}}{d\xi}(0) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}(\mathcal{B}^{(-)}(x^*))^{1/2}$, $\frac{dQ_0^{(+)}}{d\xi}(0) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}(-\mathcal{B}^{(+)}(x^*))^{1/2}$, так что в силу [Y3] условия гладкого сопряжения $Q_{0\xi}^{(-)}(0) = Q_{0\xi}^{(+)}(0)$ удовлетворяются вне зависимости от величины $W^{(0*)}$. Скорость дрейфа ВПС в нулевом порядке $W^{(0*)}$ будет найдена из уравнений первого порядка. В дальнейшем решение задачи (16) при заданном значении x^* будем обозначать $Q_0^{(\pm)}(\xi, x^*)$. Если

$$f(u, x) = \gamma u(u^2 - U^2(x)), \quad (18)$$

то $\phi^{(-)}(x) = -U(x)$, $\phi^{(0)}(x) = 0$, $\phi^{(+)}(x) = U(x)$. Тогда условие баланса [Y3] выполнено тождественно, уравнение (17) имеет гладкое решение

$$Q_0^{(\pm)}(\xi, x^*) = U(x^*)(\tanh(\xi/\theta(x^*)) \mp 1),$$

где $\theta(x^*) = (U(x^*))^{-1} \sqrt{2\kappa/\gamma}$, x^* любое в пределах (a, b) .

Регулярную функцию первого порядка найдем из уравнения $f_u(\bar{u}_0, x)\bar{u}_1(x) = 0$, решение которого $\bar{u}_1(x) = 0$. Теперь проведем разложение по степеням ε левой и правой частей (14) до порядка $m = 1$ включительно, используя (10). Далее при расчетах первого порядка в этом разделе обозначаем $x^* = x^{(1*)}$. Пусть

$$Q^{(1\pm)}(\xi, x^*) = Q_0^{(\pm)}(\xi, x^*) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, x^*),$$

функция $Q_0^{(\pm)}(\xi, x^*)$ найдена из (16), причем второй аргумент равен теперь $x^{(1*)}$, так что $x = x^* + \varepsilon\xi$, $dx^*/dt = W^{(1*)}$, $W^{(1*)} = W^{(0*)} + \varepsilon W_1$. Зависимость функций переходного слоя $Q_0^{(\pm)}$ и $Q_1^{(\pm)}$ от x^* далее явно указывать не будем.

Введем оператор $\mathcal{D}\phi(\xi) = \phi(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi), x^*) - \phi(\bar{u}_0^{(\pm)}(x^*), x^*)$, где

$$\tilde{u}^{(\pm)}(\xi) \equiv \begin{cases} \phi^{(-)}(x^*) + Q_0^{(-)}(\xi), & \xi \leq 0, \\ \phi^{(+)}(x^*) + Q_0^{(+)}(\xi), & \xi \geq 0. \end{cases}$$

Так как $\tilde{u}^{(-)}(0) = \tilde{u}^{(+)}(0)$, то $\mathcal{D}f_u^{(\pm)}(\xi) = f_u(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi), x^*) - f_u(\bar{u}_0^{(\pm)}(x^*), x^*)$, $\mathcal{D}f_x^{(\pm)}(\xi) = f_x(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi), x^*) - f_x(\bar{u}_0^{(\pm)}(x_0), x^*)$.

Для $Q_1^{(\pm)}$ слева и справа от точки перехода, используя (16), получим краевые задачи

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - f_u(\tilde{u}(\xi), x^*) Q_1^{(\pm)}(\xi) = q_1^{(\pm)}(\xi, x^*), \\ Q_1^{(\pm)}(0) = 0, \quad Q_1^{(\pm)}(\pm\infty) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

связанные условием непрерывного сшивания первых производных в точке перехода

$$\left[Q_{1\xi}^{(\pm)}(\xi) \right] \Big|_{\ominus}^{\oplus} + \left[\bar{u}_{0x}^{(\pm)}(x^*) \right] \Big|_{\ominus}^{\oplus} = 0, \quad (20)$$

где $q_1^{(\pm)}(\xi, x^*) = -W^{(0*)}\mathcal{R}_{0\xi}^{(\pm)} + K_1^{(\pm)}(\xi, x^*)$. Здесь и далее $\mathcal{R}_j^{(\pm)} = Q_j^{(\pm)} - \mu Q_{j\xi\xi}^{(\pm)}$, $\mathcal{R}_{j\xi}^{(\pm)} = Q_{j\xi}^{(\pm)} - \mu Q_{j\xi\xi\xi}^{(\pm)}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $W^{(0*)}(t) = dx^{(0*)}/dt$,

$$K_1^{(\pm)}(\xi, x^*) = \xi \bar{u}_{0x}^{(\pm)}(x^*) \mathcal{D}f_u^{(\pm)}(\xi) + \xi \mathcal{D}f_x^{(\pm)}(\xi),$$

для пары функций $\bar{v}^{(\pm)}(x)$ обозначаем $[\bar{v}^{(\pm)}(x^*)] \Big|_{\ominus}^{\oplus} = \bar{v}^{(+)}(x^*) - \bar{v}^{(-)}(x^*)$, для пары функций $v^{(\pm)}(\xi)$ обозначаем $[v^{(\pm)}(\xi)] \Big|_{\ominus}^{\oplus} = v^{(+)}(+0) - v^{(-)}(-0)$.

При выводе системы (19) мы использовали уравнения (16), которые верны для любого значения x^* независимо от значения $W^{(1*)}$. Заметим, что величина W_1 не

входит в задачу (19), так как в соответствии с (14) эта величина войдет только в слагаемые порядка ε^2 и более высокого.

Пусть оператор $\mathcal{J}^{(\pm)}[\phi]$ действует на функцию $\phi^{(\pm)}(\xi)$ по правилу

$$\mathcal{J}^{(\pm)}[\phi](\xi) = \kappa^{-1} Q_{0\xi}^{(\pm)}(\xi) \int_0^\xi (Q_{0\xi}^{(\pm)}(\eta))^{-2} d\eta \int_\eta^{\pm\infty} Q_{0\xi}^{(\pm)}(\sigma) \phi^{(\pm)}(\sigma) d\sigma$$

при условии сходимости несобственных интегралов, что всегда будет иметь место в дальнейшем, это легко проверить, используя (17). Теперь решение $Q_1^{(\pm)}(\xi)$ задачи (19) можно записать в явном виде:

$$\begin{aligned} Q_1^{(\pm)}(\xi) &= Q_1^{(\pm)}(0) \Psi^{(\pm)}(\xi) - J^{(\pm)}[q_1^{(\pm)}](\xi) = \\ &= Q_1^{(\pm)}(0) \Psi^{(\pm)}(\xi) + W^{(0*)} \mathcal{J}^{(\pm)}[\mathcal{R}_{0\xi}^{(\pm)}] - \mathcal{J}^{(\pm)}[\xi Df_u(\xi) \bar{u}_{0x}^\pm(x^*) + \xi Df_x(\xi)], \end{aligned} \quad (21)$$

где $\Psi^{(\pm)}(\xi) = (Q_{0\xi}^{(\pm)}(0))^{-1} Q_{0\xi}^{(\pm)}(\xi)$. Из условия сшивания в точке x^* и из [Y2] найдем $\Psi^{(+)}(0) = \Psi^{(-)}(0) = 1$. Неизвестную пока величину $W^{(0*)}$ найдем из условия сшивания первого порядка в точке перехода (20), которое вместе с (15) и (21), а также с учетом легко проверяемого тождества $(\mathcal{J}^{(\pm)}[\phi](\xi))_\xi(0) = \kappa^{-1} \int_0^{\pm\infty} \Psi^{(\pm)}(\sigma) \phi^{(\pm)}(\sigma) d\sigma$ дает

$$\left[Q_{1\xi}^{(\pm)}(\xi) \right] \Big|_\oplus^\ominus = \left[Q_1^{(\pm)}(\xi) \Psi_\xi^{(\pm)}(\xi) \right] \Big|_\oplus^\ominus - \frac{1}{\kappa} \int_{-\infty}^\infty \Psi^{(\pm)}(\xi) q_1^{(\pm)}(\xi) d\xi.$$

Здесь и далее при вычислении интегралов по всей числовой прямой полагаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{(\pm)}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^0 \phi^{(-)}(\xi) d\xi + \int_0^{+\infty} \phi^{(+)}(\xi) d\xi.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{(\pm)}[\phi^{(\pm)}] &= \pm \int_0^{\pm\infty} Q_{0\xi}^{(\pm)}(\xi) \phi^{(\pm)}(\xi) d\xi, \quad \mathcal{H}_2^{(\pm)}[\phi^{(\pm)}] = \pm \int_0^{\pm\infty} Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}(\xi) \phi^{(\pm)}(\xi) d\xi, \\ \mathcal{H}_{1,2}[\phi^{(\pm)}] &= \mathcal{H}_{1,2}^{(-)}[\phi^{(-)}] + \mathcal{H}_{1,2}^{(+)}[\phi^{(+)}]. \end{aligned}$$

Теперь найдем скорость дрейфа в нулевом порядке $W^{(0*)}(x^*)$:

$$W^{(0*)}(x^*) = \frac{\mathcal{H}_1^{(\pm)}[\xi \bar{u}_{0x}^{(\pm)}(x^*) Df_u^{(\pm)}(\xi) + \xi Df_x^{(\pm)}(\xi)]}{\|Q_{0\xi}^{(\pm)}\|^2 + \mu \|Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}\|^2} - \frac{\kappa Q_{0\xi}^{(\pm)}(0) [\varphi_x^{(\pm)}(x)] \Big|_{x^*-0}^{x^*+0}}{\|Q_{0\xi}^{(\pm)}\|^2 + \mu \|Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}\|^2}. \quad (22)$$

Корректность этого выражения обусловлена тем, что $\|Q_{0\xi}^{(\pm)}\|^2 = \mathcal{H}_1[Q_{0\xi}^{(\pm)}] > 0$, $\|Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}\|^2 = \mathcal{H}_2[Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}] > 0$, и по постановке задачи $\mu > 0$. Первое слагаемое в (22) определяется градиентом функции плотности источников, второе слагаемое определяется градиентом той же функции в точках ее корней. Решение $x^{(0*)}(t)$ задачи Коши

$$dx^{(0*)}/dt = W^{(0*)}(x^{(0*)}), \quad x^{(0*)}(0) = x_0^{(0*)}, \quad (23)$$

может быть определено на конечном промежутке $[0, T]$, и тогда или $x^*(T) = a$, или $x^*(T) = b$, а это означает, что ВПС вошел в контакт с границей. Решение $x^{(0*)}(t)$ также может быть определено на промежутке $[0, +\infty)$, и тогда $x^*(t) \rightarrow x_{stop}$ (в первом порядке ВПС останавливается в некоторой внутренней точке).

Расчет для случая (18) после вычисления интегралов в (22) дает такое выражение:

$$W_0(x^*) = -3\kappa \left(1 + \frac{4\mu}{5\theta^2} \right)^{-1} \frac{U_x(x^*)}{U(x^*)}, \quad (24)$$

а для расчета координаты точки перехода $x^{(0*)}(t)$, которую можно считать точкой нахождения ВПС, получим задачу Коши (23).

2.4. Второй порядок асимптотического ряда

Для построения алгоритма численного решения задачи с особыми точками нам потребуется второй и третий порядки асимптотического ряда. Регулярную функцию второго порядка найдем из уравнения $k\bar{u}_{0xx} - f_u(\bar{u}_0, x)\bar{u}_2 = 0$, так что $\bar{u}_2(x) = f_u(\bar{u}_0(x), x)^{-1} k\bar{u}_{0xx}$. Пусть

$$Q^{(2\pm)}(\xi, x^*) = Q_0^{(\pm)}(\xi, x^*) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, x^*) + \varepsilon^2 Q_2^{(\pm)}(\xi, x^*),$$

функция $Q_0^{(\pm)}(\xi, x^*)$ найдена из (16), $Q_1^{(\pm)}(\xi, x^*)$ из (19), причем входящая в (19) величина $W^{(0*)}(x^*)$ найдена из (22). Теперь $W^{(0*)}(x^*)$ можно рассматривать как известную функцию параметров задачи и координаты точки перехода. Далее при расчетах второго порядка обозначаем $x^* = x^{(2*)}$. Пусть

$$W^{(1*)}(x^*) = W^{(0*)}(x^*) + \varepsilon W_1(x^*). \quad (25)$$

Соберем слагаемые порядка ε^2 и учтем (16), (19), (25). Для нахождения $Q_2^{(\pm)}(\xi, x^*)$ получим краевую задачу

$$\begin{cases} \left(k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - f_u(\bar{u}(\xi), x^*) \right) Q_2^{(\pm)}(\xi, x^*) = q_2^{(\pm)}(\xi, x^*), \\ Q_2^{(\pm)}(0, x^*) = -\bar{u}_2^{(\pm)}(x^*), \quad Q_2^{(\pm)}(\pm\infty, x^*) = 0, \end{cases} \quad (26)$$

где $q_2^{(\pm)}(\xi, x^*) = -W_1 \mathcal{R}_{0\xi}^{(\pm)} - W^{(0*)} \mathcal{R}_{1\xi}^{(\pm)} + W^{(0*)} (P_0^{(\pm)} - \mu P_{0\xi\xi}^{(\pm)}) + K_2^{(\pm)}$, $K_2^{(\pm)}(\xi, t)$ выражается через частные производные f до второго порядка, $P_0^{(\pm)}(\xi, x^*) = \frac{\partial}{\partial x^*} Q_0^{(\pm)}(\xi, x^*)$.

Решение задачи (26) можно записать в явном виде:

$$Q_2^{(\pm)}(\xi) = Q_2^{(\pm)}(0) \Psi(\xi) - \mathcal{J}^{(\pm)}[q_2^{(\pm)}](\xi). \quad (27)$$

Условие гладкого сшивания дает скорость дрейфа первого приближения W_1 :

$$W_1(x^*) = \frac{\mathcal{H}_1[K_2] - W^{(0*)} \mathcal{H}_1 \mathcal{R}_{1\xi}^{(\pm)} + W^{(0*)} \mathcal{H}_1 (P_0^{(\pm)} - \mu P_{0\xi\xi}^{(\pm)})}{\|Q_{0\xi}^{(\pm)}\|^2 + \mu \|Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}\|^2}. \quad (28)$$

Координата точки перехода в первом порядке $x^{(1*)}$ находится из задачи Коши

$$dx^{(1*)}/dt = W^{(0*)}(x^{(1*)}) + \varepsilon W_1(x^{(1*)}), \quad x^{(1*)}(0) = x_{00}, \quad (29)$$

причем $W^{(1*)}(x^{(1*)}) = W^{(0*)}(x^{(1*)}) + \varepsilon W_1(x^{(1*)})$. Из [У1] следует, что правая часть (29) имеет равномерно ограниченную на $[a, b]$ производную по $x^{(1*)}$, и поэтому удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$, поэтому решение существует.

Пусть на всем промежутке $a < x < b$ верно $W^{(0*)}(x^*) \geq w_o > 0$. Записав решение (29) в явном виде, убедимся в том, что решение (29) при $\varepsilon \rightarrow +0$ стремится к решению (23) равномерно на $[0, T]$. Линеаризация (29) приводит к семейству задач Коши

$$\begin{cases} x_{0t} = W^{(0*)}(x_0), & \begin{cases} x_{1t} = x_1 W_x^{(0*)}(x_0) + W_1(x_0), \\ x_0(0) = x_{00}, & x_1(0) = x_{10}, \end{cases} \end{cases}$$

первая из которых является автономной, вторая – линейной.

Найдем W_1 в явном виде для кубической неоднородности (18), (24). Вычисление интегралов показывает, что $W_1(x^*) = 0$, поэтому $W^{(1*)}(x^*) = W^{(0*)}(x^*)$. Равенство

нулю скорости дрейфа первого порядка связано с тем, что функция переходного слоя нулевого порядка $Q_0(\xi, x^*)$ является нечетной от ξ при любом x^* , скорость дрейфа первого порядка выражается в конечном счете в виде комбинации сходящихся несобственных интегралов от произведения нечетной функции и $Q_{0\xi}(\xi, x^*)$ (которая является четной функцией). Это свойство скорости первого порядка, естественно, является специфическим и верно только для нечетной функции плотности источников, $f(-u, x) = f(u, x)$. Именно к такому классу относится функция (18). Поэтому для особой точки первого рода необходимо найти третий порядок асимптотического разложения.

2.5. Третий порядок асимптотики

Регулярная функция третьего порядка для случая $f_\varepsilon = 0$ равна $\bar{u}_3(x) = 0$. Для вычисления функций переходного слоя обозначим

$$Q^{(\pm)}(\xi, x^*) = Q_0^{(\pm)}(\xi, x^*) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, x^*) + \varepsilon^2 Q_2^{(\pm)}(\xi, x^*) + \varepsilon^3 Q_3^{(\pm)}(\xi, x^*),$$

$$W^{(2*)}(x^*) = W^{(0*)}(x^*) + \varepsilon W^{(1*)}(x^*) + \varepsilon^2 W_2(x^*),$$

$x^* = x^{(3*)}$, функции $Q_{0,1,2}^{(\pm)}(\xi, x^*)$ выражаются (16), (21), (27), $W^{(0*)}(x^*)$, $W^{(1*)}(x^*)$ выражаются (22), (28). Найдем функцию переходного слоя $Q_3^{(\pm)}(\xi)$ из задачи, аналогичной (26). Условие гладкого сшивания в третьем порядке позволяет найти

$$W_2 = \frac{\mathcal{H}_1[K_3] - W^{(0*)}\mathcal{H}_1[\mathcal{R}_{2\xi}^{(\pm)}] - W^{(1*)}\mathcal{H}_1[\mathcal{R}_{1\xi}^{(\pm)}] + \mathcal{H}_1[P_1^{(\pm)} - \mu P_{1\xi\xi}^{(\pm)}]}{\|Q_{0\xi}^{(\pm)}\|^2 + \mu\|Q_{0\xi\xi}^{(\pm)}\|^2}, \quad (30)$$

$P_1^{(\pm)}(\xi, x^*) = \frac{\partial}{\partial x^*} Q_1^{(\pm)}(\xi, x^*)$. Координату $x^{(2*)}$ найдем из задачи Коши

$$dx^{(2*)}/dt = W^{(0*)}(x^{(2*)}) + \varepsilon W^{(1*)}(x^{(2*)}) + \varepsilon^2 W_2(x^{(2*)}), \quad x^{(2*)}(0) = x_{00}. \quad (31)$$

Точно так же убедимся в том, что линеаризация (31) при условии $W^{(0*)}(x^*) > 0$ приводит к семейству одной автономной и нескольких линейных задач Коши. Как и в [17], уравнения для dx_m/dt , $m \geq 1$, имеют одинаковую линейную часть.

Для кубической функции (18) выражение скорости второго порядка имеет вид

$$W_2(x^*) = -C_2 \frac{k^2}{\gamma} \frac{U_{xxx}(x^*)}{U^3(x^*)} \frac{1}{1 + 4\mu/5\theta^2}. \quad (32)$$

Константа C_2 представляет собой комбинацию сходящихся несобственных интегралов от степенных и гиперболических функций, числовое значение этой величины $C_2 = 2,4674\dots$

Заметим, что для рассматриваемого нами случая $U_{xxx}(\hat{x}) < 0$ выражение $W_2(x^*) > 0$, поэтому $W^{(2*)}(x^*) > 0$ в окрестности x_{stop} , это означает, что ВПС перейдет через особую точку и продолжит движение в том же направлении. Таким образом, в третьем порядке аппроксимации

$$dx^{(3*)}/dt = W_0(x^{(3*)}) + \varepsilon^2 W_2(x^{(3*)}), \quad x^{(3*)}(0) = x_{00}. \quad (33)$$

Теорема 1. В приближении третьего порядка найдется такая окрестность Ω точки x_{stop} , что при $U_x(x_{\text{stop}}) = 0$, $U_{xx}(x_{\text{stop}}) = 0$, $U_{xxx}(x_{\text{stop}}) < 0$ и при любом

$x_{00} < x_{\text{stop}}$, $x_{00} \in \Omega$, что трижды непрерывно дифференцируемая функция $x^*(t)$ является возрастающей на $(0, T)$, причем уравнение $x^*(t) = x_{\text{stop}}$ имеет единственный простой корень $t_1 > t_0$.

Так же как и в [6] (для квазилинейного параболического уравнения) и в [26], [17] (для уравнения с малым параметром) построим верхнее и нижнее решение задачи (1). Обоснование упорядоченности верхнего и нижнего решений проводится так же, как в [17], мы будем использовать для построения верхнего и нижнего решений порядок асимптотического разложения не менее трех и предположим, что $W_3(x^*) \geq W_{30} > 0$ на $[a, b]$. Вместо принципа сравнения для эллиптического уравнения [6] мы используем обобщенный принцип сравнения для оператора (1), сформулированный и доказанный в [27]. Приведем только формулировки теорем.

Теорема 2. Для любого порядка асимптотического разложения $m \geq 3$ существуют упорядоченные верхнее решение $\beta(x, t, \varepsilon)$ и нижнее решение $\alpha(x, t, \varepsilon)$ задачи (4) такие, что $L[\alpha] > 0$, $L[\beta] < 0$, $\alpha(x, t, \varepsilon) < \beta(x, t, \varepsilon)$, где $L[u] = -\varepsilon^2 u_t + \varepsilon^4 \mu u_{xxt} + \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u, x)$.

Теорема 3. Пусть начальная функция $u^{(0)}(x, \varepsilon)$ дважды дифференцируема, и $\alpha(x, 0, \varepsilon) < u^{(0)}(x, \varepsilon) < \beta(x, 0, \varepsilon)$. Тогда существует единственное решение задачи (4), причем $\alpha(x, t, \varepsilon) < u(x, t, \varepsilon) < \beta(x, t, \varepsilon)$.

3. Построение адаптивной сетки для задачи в градиентной среде

Теперь мы можем сформулировать алгоритм численного решения начально-краевой задачи для уравнения ОКПП (4) на адаптивной сетке, используя наиболее эффективный метод априорного прогноза положения ВПС, основанный на использовании явных выражений для скорости ВПС.

Мы выделим три класса задач, для которых построение такого алгоритма существенно различается. В этом разделе мы рассмотрим (1) случай гладкой функции плотности источников и предположим, что выполнено достаточное условие прохождения ВПС всей области $[a, b]$ за конечное время:

$$W_0(x^*) \geq \tilde{W}_0 > 0.$$

В двух последующих разделах мы рассмотрим более сложные случаи, когда (2) скорость $W_0(x^*) = 0$ в некоторой точке промежутка $[a, b]$, и тогда без дополнительных мер нарушается условие ограниченности толщины области D_2 , (3) формально найденная из (22) скорость $W_0(x^*) = \infty$ в некоторой точке промежутка $[a, b]$, это может быть, если функция плотности источников разрывна или имеет неограниченную первую производную. Эти два случая мы будем называть соответственно особыми точками первого и второго рода контрастной структуры.

Для построения и обоснования адаптивной сетки используем методику верхнего и нижнего решения, разработанную для уравнения реакции-диффузии в серии работ [26], [17] и для уравнения КПП в работах [29], [30]. Построим верхнее решение $\beta(x, t, \varepsilon)$ и нижнее решение $\alpha(x, t, \varepsilon)$ [6], [17] задачи (4). Эти функции имеют вид бегущей квазиволны, как и точное решение (4). Детально методику такого построения мы описывать здесь не будем, так как сделаем это для более общего случая среды с кусочно-гладкой функцией плотности источников в разделе 6. Точка перехода для верхнего решения и x_α^* для верхнего решения в первом порядке асимптотического ряда находятся из дифференциальных уравнений, аналогичных (23). Мы использу-

ем оценку скорости убывания функций $\delta_\beta = \beta(x, t, \varepsilon) - \phi^{(-)}(x)$ при удалении x влево от x_β^* и $\delta_\alpha = \phi^{(-)}(x) - \alpha(x, t, \varepsilon)$ при удалении x вправо от x_α^* , которая вытекает из (17) и из явного выражения для верхнего и нижнего решений, которое будет дано в разделе 6. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 4. При выполнении условий [У1, 2, 3] найдется константа $C_1 > 0$ такая, что для любого заданного порядка частичной суммы асимптотического ряда $n \geq 1$ и заданного порядка производной $m \geq 1$ найдется константа $C_2 > 0$ такая, что в области $D_{1,\beta} = \{a < x < x_\beta^* - C_2\varepsilon\theta\}$ и в области $D_{3,\beta} = \{x_\beta^* + C_2\varepsilon\theta < x < b\}$ все частные производные функции $\beta(x, t, \varepsilon)$ порядка до m включительно равномерно ограничены по модулю константой C_1 . В области $D_{2,\beta}^{(-)} = \{x_\beta^* - C_2\varepsilon\theta \leq x < x_\beta^*\}$ и $D_{2,\beta}^{(+)} = \{x_\beta^* < x \leq x_\beta^* + C_2\varepsilon\theta\}$ все частные производные указанных порядков функции $\beta(x, t, \varepsilon)$ ограничены по модулю константой C_1/ε . Аналогичные утверждения верны для нижнего решения.

Напомним, что мы постулировали в постановке задачи равномерную ограниченность всех частных производных функции f всех порядков, входящих в явное выражение для соответствующей частичной суммы асимптотического ряда.

Таким образом, мы выделяем области пятен КС D_1 и D_3 , для которых можно составить и использовать сетку ω_1 с шагом $h_1 = \text{const}$ (имеется в виду, что величина h_1 выбирается априорно по заданным значениям максимума модуля всех производных нужного порядка для построения сеточной аппроксимации дифференциального уравнения). При таком способе выбора шага в выражения для невязки разностной схемы будут входить только равномерно ограниченные частные производные, причем константа ограниченности не будет зависеть от значения параметра ε .

Мы выделяем также область ВПС D_2 , ширина которой в растянутой переменной ξ равна \tilde{C}_2 , в координате x равна $\tilde{C}_2\varepsilon$, причем константа \tilde{C}_2 не зависит от ε , но зависит от значения константы равномерной ограниченности производных функции плотности источников. Таким образом, в этой области мы можем построить сетку ω_2 с априорно выбранным шагом h_2 , значение которого мы выберем так, чтобы гарантировать равномерную ограниченность невязки разностной схемы.

Нам придется также обеспечить сопряжение сеток ω_1 и ω_2 . Без ограничения общности можно считать, что $h_2 = 2^{-k}h_1$, k натуральное число, которое можно выбрать так, чтобы удовлетворить требованиям к сеткам ω_1 и ω_2 . В подобласти $\tilde{D}_1 \subset D_1$, расположенной внутри D_1 и примыкающей к D_2 , мы расположим переходную сетку, которая обеспечит сопряжение. Переходная сетка будет иметь переменный шаг, причем эта переходная сетка будет являться объединением трехточечных частично перекрывающихся шаблонов, величина шага соседних шаблонов будет различаться ровно в 2 раза. Таким образом, общая трудоемкость расчета одного временного слоя имеет порядок $C' + C'' \log_2(\varepsilon^{-1})$.

Разумеется, можно легко сконструировать алгоритм АС, основанный на апостериорной оценке положения ВПС, которую можно дать, используя оценки для экспоненциального убывания функций ВПС.

4. Численное моделирование задач с особыми точками первого рода

Нередко возникающая в практически важных задачах разновидность градиентной среды порождает задачи с особыми точками первого рода.

Мы называем точку x_{stop} особой точкой первого рода, если скорость дрейфа ВПС в данной точке, найденная в нулевом порядке асимптотического разложения для задачи с несбалансированной неоднородностью (или найденная в первом порядке асимптотического разложения для задачи со сбалансированной неоднородностью), равна нулю. Мы покажем, что в этом случае (который, естественно, не соответствует сформулированным ранее достаточным условиям корректности метода АС) необходимо по-другому строить АС, чтобы обеспечить заданный порядок аппроксимации в области пятен КС и в области ВПС, и одновременно сохранить оценку $C' + C'' \log_2(\varepsilon^{-1})$ для числа операций на одном временном слое.

В работе [30] построена теория прохождения фронта ВПС через особые точки КС. Решение (в неявной форме) уравнения (23) движения ВПС в нулевом порядке асимптотического разложения имеет вид $\int_{x_0}^x (W^{(0*)}(x^*))^{-1} dx^* = t - t_0$. Рассмотрим случай, в котором скорость нулевого порядка обращается в нуль в некоторой точке. Мы используем методику и результаты, полученные в [30]. При конструировании численного алгоритма решения начально-краевой задачи (4) важно иметь информацию о положении ВПС с гарантированной точностью, и это требование предполагает вычисление не только старшего, но и следующего первого по номеру отличного от нуля члена асимптотического ряда, что и было выполнено нами в разделах 2.4 и 2.5.

Для определенности рассмотрим только случай кубической правой части (18) и будем использовать (24) для скорости дрейфа. Пусть $U_x(x_{\text{stop}}) = 0$, $U_{xx}(x_{\text{stop}}) = 0$, $U_{xxx}(x_{\text{stop}}) \neq 0$, тогда $W^{(0*)}$ сохраняет знак в некоторой проколотой окрестности точки x_{stop} . Достаточно рассмотреть случай $U_{xxx}(x_{\text{stop}}) < 0$, тогда $W^{(0*)}(x^*) > 0$ в некоторой окрестности точки x_{stop} , кроме самой точки x_{stop} , в которой $W^{(0*)}(x^*) = 0$. Вопрос о прохождении особой точки первого рода в нулевом порядке асимптотического разложения скорости дрейфа равносильен сходимости или расходимости $\int_{x_{\text{stop}}}^x dx^* / W^{(0*)}(x^*)$. Без ограничения общности считаем $x_{\text{stop}} = 0$. Рассмотрим широко распространенную на практике степенную зависимость

$$U(x) = \begin{cases} U_0 - Cx^\alpha, & x \geq 0, \\ U_0 + C(-x)^\alpha, & x \leq 0 \end{cases}$$

в выражении (24) при $C > 0$, $\alpha > 1$, так что $W^{(0*)}(0) = 0$ и $W^{(0*)}(x) > 0$ при $x \neq 0$. Предполагаем, что $a < 0$, $b > 0$, и $U(x) > 0$ на $[a, b]$. Начальное положение ВПС выберем левее точки x_{stop} .

Для случая $\alpha \geq 2$ решение уравнения (24) можно оценить, используя метод дифференциальных неравенств [26]. Для любого $x_0^{(0*)} < 0$ найдутся такие C_1 и C_2 , $0 < C_1 < C < C_2$, что $X_\alpha(C_1, t) < x^{(0*)}(t) < X_\alpha(C_2, t)$ при $t > t_0$, где

$$X_\alpha(C, t) = \begin{cases} -\left((-x_0^{(0*)})^{-(\alpha-2)} + C\alpha(\alpha-2)(t-t_0)\right)^{-\frac{1}{\alpha-2}} & \text{при } \alpha \neq 2, \\ x_0^{(0*)} e^{-C\alpha(t-t_0)} & \text{при } \alpha = 2, \end{cases} \quad (34)$$

Решение (24) существует на промежутке $t \in [t_0, +\infty)$, причем для всех t верно $x^{(0*)}(t) < x_{\text{stop}}$, $x^{(0*)}(t) \rightarrow -x_{\text{stop}} - 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Если же $1 < \alpha < 2$, то в соответствии с результатами [30], ВПС за конечное время пройдет окрестность такой особой точки первого рода. Таким образом, найдется такое $t_1 > t_0$, что точное решение уравнения (23) станет равно x_{stop} при $t = t_1$. Задача (23) имеет неединственное решение, решением будет теперь функция $x^{(0*)}(t) < x_{\text{stop}}$

при $t < t_1$, $x^{(0*)}(t) = x_{\text{stop}}$ при $t_1 \leq t \leq t_2$, где $t_2 \geq t_1$, и $x^{(0*)}(t) > x_{\text{stop}}$ при $t > t_2$. Значение t_2 не определяется из уравнений нулевого порядка.

Таким образом, численная модель КС с особой точкой первого рода требует по крайней мере второго порядка выражения для скорости дрейфа. Для построения нижнего и верхнего решения мы используем теперь третий порядок частичной суммы асимптотического ряда, выражения (22), (24) и (30), (32) для скорости дрейфа ВПС в третьем порядке, уравнение (31), (33) для положения точки перехода. Теперь область мелкой сетки ω_2 выбирается с использованием выражения третьего порядка (33) и соответствующим образом построенных верхнего и нижнего решений, детальное описание построения которых дано в разделе 6.

5. Численное моделирование задач с особыми точками второго рода

Мы называем особой точкой второго рода точку $x^{(\infty)}$, в которой скорость дрейфа ВПС в нулевом (для несбалансированной задачи) и в первом (для сбалансированной задачи) порядке формально обращается в бесконечность. Так как в данной работе рассматривается задача со сбалансированной плотностью источников, то в соответствии с (24) эта ситуация возникает при $U_x(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow x^{(\infty)}$, или при наличии точки разрыва первого рода функции с конечным значением скачка $U(x^{(\infty)} + 0) - U(x^{(\infty)} - 0) > 0$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t - \varepsilon^4 \mu u_{xxt} = \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u, x, \varepsilon), \\ u_x(a, t, \varepsilon) = u_a, \quad u_x(b, t, \varepsilon) = u_b, \quad u(x, 0, \varepsilon) = \psi(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (35)$$

$x \in (a, b)$, $t \in [0, T]$, $u(x, t, \varepsilon) \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\Omega = [a, b] \times [0, T]$, $\varepsilon > 0$, которая отличается от (4) наличием зависимости $f(u, x, \varepsilon)$.

Пусть функция плотности источников $f(u, x, \varepsilon)$ задана в виде

$$f(u, x, \varepsilon) = f_0(u, x) + \varepsilon f_1(u, x),$$

причем главная часть $f_0(u, x)$ есть кубическая функция (18), а в первом порядке

$$f_1(u, x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < \hat{x}, \\ -2\gamma u U(x) \delta U, & \text{при } x \geq \hat{x}, \end{cases}$$

δU – константа. Заметим, что тем самым мы будем строить обобщенное решение задачи (35). Точка сшивания x^* разделяет промежуток $[a, b]$ на два интервала: $G^{(-)} = \{a \leq x < x^*(t, \varepsilon)\}$, $G^{(+)} = \{x^*(t, \varepsilon) < x \leq b\}$. Задача (35) также расщепляется на две задачи аналогично (16), (19), (26), по левую сторону от x^* , и по правую сторону x^* . Однако теперь в зависимости от положения точки перехода одна из этих двух задач также расщепляется на две, левее и правее точки скачка \hat{x} . Формулы асимптотического разложения (10), (12) остаются верными. Регулярная функция первого порядка теперь не равна нулю:

$$\bar{u}^{(\pm)} = -(f_{0u}(\bar{u}_0^{(\pm)}(x), x))^{-1} f_1(\bar{u}_0^{(\pm)}(x), x),$$

$$\text{так что } \bar{u}_1^{(+)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < \hat{x}, \\ \delta U, & \text{при } x \geq \hat{x}, \end{cases} \quad \bar{u}_1^{(-)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < \hat{x}, \\ -\delta U, & \text{при } x \geq \hat{x}. \end{cases}$$

В случае разрывной функции первого порядка удобно записать представление сразу для суммы регулярной функции и функции переходного слоя:

$$\tilde{u}_i(\xi) = \begin{cases} \bar{u}_i^{(+)}(x^*) + Q_i^{(+)}(\xi) & \text{при } \xi \geq 0, \\ \bar{u}_i^{(-)}(x^*) + Q_i^{(-)}(\xi) & \text{при } \xi \leq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Для $x^* \leq \hat{x}$ получим краевую задачу вида (19), однако теперь функция плотности источников первого порядка $\tilde{f}_1 = f_1(\tilde{u}, x^*)$ имеет вид

$$\tilde{f}_1 = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi < \hat{\xi}, \\ -2\gamma U(x^*)\delta U\tilde{u}, & \xi \geq \hat{\xi} = (\hat{x} - x^*)/\varepsilon, \end{cases}$$

Если же слой расположен справа от точки скачка \hat{x} , т.е. $x^* \geq \hat{x}$, получим

$$\tilde{f}_1^{(-)} = \begin{cases} 0, & \xi < \hat{\xi} = (\hat{x} - x^*)/\varepsilon, \\ 2\gamma U(x^*)\delta U\tilde{u}, & \hat{\xi} \leq \xi \leq 0, \end{cases} \quad \tilde{f}_1^{(+)} = -2\gamma U(x^*)\delta U\tilde{u}, \quad 0 \leq \xi \leq \infty.$$

Для кубической функции плотности источников получим выражение

$$W_0 = \frac{3}{1 + 4\mu/5\theta^2} \left[-\kappa \frac{U_x(x_0)}{U(x_0)} + 2^{-3/2} \sqrt{\kappa\gamma} \delta U \left(\tanh^2 \left(\sqrt{\frac{\gamma}{2\kappa}} U\hat{\xi} \right) - 1 \right) \right], \quad (36)$$

которое мы будем использовать для построения адаптивной сетки в окрестности особой точки второго рода. Верхнее и нижнее решения, так же как в разделе 2, строим в первом порядке частичной суммы асимптотического ряда, причем результаты раздела 2.5 гарантируют корректность построения АС, т.е. равномерную оценку точности и логарифмическую по ε оценку числа операций. Для обоснования мы получили также явные выражения следующих порядков асимптотического ряда, которые в данной работе не приводим.

6. Построение верхнего и нижнего решения

Мы используем для построения АС не саму формальную асимптотику некоторого порядка, а верхнее и нижнее решения, между которыми в соответствии с принципом максимума заключено точное решение. Для того, чтобы единообразно описать задачи с градиентной средой, задачи с особыми точками первого и второго рода, мы построим обобщенное верхнее решение $\beta(x, t, \varepsilon)$ и обобщенное нижнее решение $\alpha(x, t, \varepsilon)$. Эти функции непрерывны и удовлетворяют условиям $\langle \mathbb{D}(\alpha), w \rangle > 0$, $\langle \mathbb{D}(\beta), w \rangle < 0$ почти всюду в области $x \in (a, b) \setminus \{x^*\}$, и $t \in (0, T]$, а также граничным условиям $\alpha(a, t, \varepsilon) < u_a$, $\alpha(b, t, \varepsilon) < u_b$ почти всюду на $t \in [0, T]$, $\alpha(x, 0, \varepsilon) < u^0(x, \varepsilon) < \beta(x, 0, \varepsilon)$ почти всюду на $x \in [a, b]$, и условиям излома в точках сшивания

$$\frac{\partial}{\partial x} \alpha_m(x_\alpha^* - 0, t, \varepsilon) > \frac{\partial}{\partial x} \alpha_m(x_\alpha^* + 0, t, \varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial x} \beta_m(x_\beta^* - 0, t, \varepsilon) < \frac{\partial}{\partial x} \beta_m(x_\beta^* + 0, t, \varepsilon).$$

Здесь \mathbb{D} есть оператор задачи (4), w пробная функция [28]. Мы построим $\alpha(x, t, \varepsilon)$ и $\beta(x, t, \varepsilon)$ в виде модифицированных частичных сумм рядов (10), (12), так же как это было сделано в [17]:

$$\begin{aligned} \alpha_m(x, t, \varepsilon) &= U_{m,\alpha} + \varepsilon^{m+1} (\tilde{u}_{(m+1),\alpha}(\xi_\alpha) - p + \Pi_{(m+1)\alpha}(\zeta_a) + \Pi_{(m+1)\alpha}(\zeta_b)), \\ \beta_m(x, t, \varepsilon) &= U_{m,\beta} + \varepsilon^{m+1} (\tilde{u}_{(m+1),\beta}(\xi_\beta) + p + \Pi_{(m+1)\beta}(\zeta_a) + \Pi_{(m+1)\beta}(\zeta_b)), \end{aligned}$$

где $p > 0$, $\xi_{\alpha,\beta} = \varepsilon^{-1}(x - x_{\alpha,\beta}^*(t, \varepsilon))$, $x_{\alpha,\beta}^*(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k x_k(t) + \varepsilon^m x_{(m)\alpha,\beta}(t)$.

Здесь $U_{m,\alpha,\beta}(x, t, \varepsilon)$ – частичные суммы, аналогичные (7) и (8),

$$U_{m,\alpha,\beta}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k (\tilde{u}_{k,\alpha,\beta}(\xi_{\alpha,\beta}, t) + \Pi_{a,k,\alpha,\beta}(\zeta_a) + \Pi_{b,k,\alpha,\beta}(\zeta_b)),$$

$$\tilde{u}_{k,\gamma}^{(\pm)} = \begin{cases} \bar{u}_{k,\gamma}^{(-)} & \text{при } x \leq x_\gamma^*, \\ \bar{u}_{k,\gamma}^{(+)} & \text{при } x > x_\gamma^*, \end{cases} \quad Q_{k,\gamma}^{(\pm)} = \begin{cases} Q_{k,\gamma}^{(-)} & \text{при } x \leq x_\gamma^*, \\ Q_{k,\gamma}^{(+)} & \text{при } x > x_\gamma^*, \end{cases} \quad \gamma = \alpha, \beta.$$

Модифицированные функции переходного слоя m -го порядка для верхнего решения $Q_{k,\beta}^{(\pm)}$ и $Q_{k,\alpha}^{(\pm)}$ для нижнего решения, $k = 0, \dots, m$, найдем из задач

$$\begin{cases} \left(\kappa \frac{\partial^2}{\partial \xi_\gamma^2} - f_{0u}(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi_\gamma), x^*, 0) \right) \tilde{u}_{j,\gamma} = q_{j,\gamma}^{(\pm)}(\xi_\gamma), \\ \tilde{u}_{j,\gamma}^{(\pm)}(0) = -p_{j,\gamma}, \quad \tilde{u}_{j,\gamma}^{(\pm)}(\pm\infty) = 0, \quad j = 0 \dots m+1, \end{cases} \quad (37)$$

где $q_{j,\gamma}^{(\pm)}(\xi, t) = -W_{j-1,\gamma}(Q_{0\xi_\gamma}^{(\pm)}(\xi_\gamma, t) - \mu Q_{0\xi_\gamma\xi_\gamma}^{(\pm)}) + K_{j,\gamma}^{(\pm)}$,

$$\tilde{u}_j(\xi_\gamma) = \begin{cases} \bar{u}_j^{(+)}(x_\gamma^*) + Q_j^{(+)}(\xi_\gamma, t), & \xi_\gamma \geq 0, \\ \bar{u}_j^{(-)}(x_\gamma^*) + Q_j^{(-)}(\xi_\gamma, t), & \xi_\gamma \leq 0, \end{cases}$$

$$W_{j,\gamma} = \begin{cases} W_j, & j = 0 \dots m-1, \\ W_{j,\gamma}, & j = m, \end{cases} \quad \tilde{u}_{j,\gamma}^{(\pm)} = \begin{cases} \tilde{u}_j^{(\pm)}, & j = 0 \dots m, \\ \tilde{u}_{j,\gamma}^{(\pm)}, & j = m+1, \end{cases}$$

$$K_{j,\gamma}^{(\pm)} = \begin{cases} K_j^{(\pm)}, & j = 0 \dots m, \\ K_{j,\gamma}^{(\pm)}, & j = m+1, \end{cases} \quad p_{j,\gamma}^{(\pm)} = \begin{cases} 0, & j = 0 \dots m, \\ p, \gamma = \beta, j = m+1, \\ -p, \gamma = \alpha, j = m+1, \end{cases} \quad \gamma = \alpha, \beta.$$

Выражения для $K_{m+1,\gamma}$ вычисляются с заменой ξ на ξ_γ и $\bar{u}_{(m+1)}$ на $\bar{u}_{(m+1)} + p_{m+1,\gamma}$, явные выражения приводить не будем, эти функции выражаются через правую часть и ее производные. Координату $x_{(m,\gamma)}$ найдем из системы $(m+1)$ -го порядка:

$$dx_{(m,\gamma)}/dt = W_1^{(1)}x_{(m,\gamma)} + W_{(m,\gamma)}^{(0)} + \sigma_\gamma, \quad x_{(m,\gamma)}(0) = \delta_\gamma, \quad (38)$$

$$\sigma_\gamma = \begin{cases} \sigma, & \gamma = \alpha, \\ -\sigma, & \gamma = \beta, \end{cases} \quad \delta_\gamma = \begin{cases} \delta, & \gamma = \alpha, \\ -\delta, & \gamma = \beta, \end{cases} \quad \text{где } \sigma > 0 \text{ и } \delta > 0 \text{ константы,}$$

$$W_{(m,\gamma)}^{(0)} = \hat{W}_{(m,\gamma)}^{(0)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (Q_{0\xi_\gamma}^{(\pm)})^2 d\xi_\gamma + \mu \int_{-\infty}^{\infty} (Q_{0\xi_\gamma\xi_\gamma}^{(\pm)})^2 d\xi_\gamma \right)^{-1},$$

$$\hat{W}_{(m,\gamma)}^{(0)} = -W_{m-1} \mathcal{H}[\tilde{u}_{1,\xi_\gamma} - \mu \tilde{u}_{1,\xi_\gamma\xi_\gamma}] + \int_{-\infty}^{\infty} Q_{0\xi_\gamma}^{(\pm)} \tilde{f}_u(\bar{u}_{m+1}(x_\gamma^*) + p_{m+1,\gamma} + \dots) d\xi_\gamma + \dots$$

Константа σ обеспечивает нужный скачок производных, константа δ дает сдвиг начального положения слоя. Все $W_{j,\gamma}^{(0)}$ равномерно ограничены ввиду экспоненциального убывания функций переходного слоя, $Q_{j,\gamma}^{(\pm)}$ экспоненциально убывают. Коэффициенты $p > 0$, $\sigma > 0$ и $\delta > 0$ обеспечивают также условия $dx_\beta^*/dt < dx^*/dt$, $dx_\alpha^*/dt > dx^*/dt$. Параметр $\delta > 0$ гарантирует, что при $t \in [0, T]$ функции $x_{(m,\beta)}$ и $x_{(m,\alpha)}$ удовлетворяют условиям $x_{(m,\beta)} < 0 < x_{(m,\alpha)}$. Заметим, что $W_1^{(1)}$ в (38) равномерно ограничена на $[a, b]$.

7. Численное моделирование

Для численного моделирования квазилинейного уравнения ОКПП используем метод разностных схем с итерационным решением системы нелинейных уравнений на каждом временном слое. Мы используем метод адаптивных неоднородных сеток с переменным во времени шагом. Мы выбираем величину шага по пространственной и временной координате так, чтобы иметь возможность находить скорость дрейфа ВПС с точностью до шести верных значащих цифр после запятой.

Для нахождения численного решения начально-краевой задачи (4) для уравнения ОКПП был использован метод разностных схем [31], [32], [33], модифицированный в соответствии с идеями построения обобщенных решений [34]. Этот метод позволяет представить решение системы (4) как предел решения специально построенной нелинейной системы алгебраических уравнений при одновременном стремлении к нулю шага по временной координате и шага по пространственной координате.

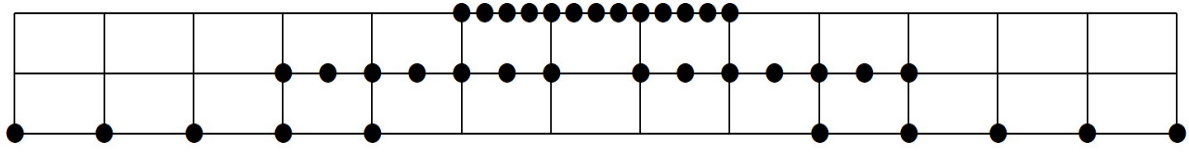


Рис. 1. Схематическое изображение одного временного слоя разностной схемы

Fig. 1. Schematic representation of a single time-direction layer of the model discrete approximation

Для построения разностной схемы мы используем шеститочечный шаблон на прямоугольной сетке. Пусть $\omega_{M,N}$ – сетка $x_n = a + nh_x$, $0 \leq n \leq N$, $t_m = mh_t$, $0 \leq m \leq M$, h_x , h_t – шаги по координатам x и t . $h_x = \frac{b-a}{N}$, $h_t = \frac{T}{M}$. Пусть $u_{m,n}$ – сеточное значение $u(x, t)$ для (4) в точке $x = x_n$ и $t = t_m$. Запишем нелинейную систему, аппроксимирующую (4) на шаблоне

(x_{n-1}, t_m)	(x_n, t_m)	(x_{n+1}, t_m)
(x_{n-1}, t_{m-1})	(x_n, t_{m-1})	(x_{n+1}, t_{m-1})

в виде

$$\begin{aligned} \frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{h_t} + V \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n-1} + u_{m-1,n+1} - u_{m-1,n-1}}{4h_x} - \\ - \frac{\mu}{2h_t} \frac{u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{h_x^2} - \frac{\mu}{2h_t} \frac{u_{m-1,n-1} - 2u_{m-1,n} + u_{m-1,n+1}}{h_x^2} = \\ = \kappa \frac{u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{2h_x^2} + \kappa \frac{u_{m-1,n-1} - 2u_{m-1,n} + u_{m-1,n+1}}{2h_x^2} - \\ - \frac{1}{2}f(u_{m,n}, x_n) - \frac{1}{2}f(u_{m-1,n}, x_n), \quad (39) \end{aligned}$$

с граничными и начальными условиями

$$u(m, 0) - \alpha_a(u_{m,1} - u_{m,0})/h_x = \beta_a, \quad u(m, N) + \alpha_b(u_{m,N} - u_{m,N-1})/h_x = \beta_b, \quad (40)$$

$$u(0, n) = u^0(n). \quad (41)$$

Запишем кратко уравнение (39) в виде

$$\begin{aligned} A_1^\dagger(x_{n-1}, t_m)u(x_{n-1}, t_m) + A_2^\dagger(u(x_n, t_m)) + A_3^\dagger u(x_{n+1}, t_m) + \\ + A_1^\dagger(x_{n-1}, t_{m-1})u(x_{n-1}, t_{m-1}) + A_2^\dagger(u(x_n, t_{m-1})) + A_3^\dagger u(x_{n+1}, t_{m-1}) = B_{m,n}. \quad (42) \end{aligned}$$

Здесь A_1 и A_3 – числовые коэффициенты, определяемые только через параметры задачи и сетки, $A_2(u)$ функция, в определение которой входят параметры задачи и сетки и еще функция f . Теперь рассмотрим наложенные одна на другую сетки

$$\omega^{(0)} = \omega_{M,N}, \quad \omega^{(1)} = \omega_{M,N \cdot 2}, \quad \dots, \quad \omega^{(K)} = \omega_{M,N \cdot 2^K},$$

причем $x_n^{(k)} = a + n \frac{h_x}{2^k}$, рис.1.

В соответствии с методикой Кутта–Мерсона [35], [36], мы выбираем шаг более подробной сетки в два раза меньше шага более грубой.

Пусть каждая из сеток определена на своем множестве индексов,
 $\omega^{(0)}$ на множестве $n^{(0)} \in \{n_a^{(0)}, \dots, n_b^{(0)} \cup n_c^{(0)}, \dots, n_d^{(0)}\}$, $n_a^{(0)} = 0$, $n_d^{(0)} = N$,
 $\omega^{(1)}$ на множестве $n^{(1)} \in \{n_a^{(1)}, \dots, n_b^{(1)} \cup n_c^{(1)}, \dots, n_d^{(1)}\}$, ...,
 $\omega^{(J)}$ на множестве $n^{(J)} \in \{n_a^{(J)}, \dots, n_b^{(J)} \cup n_c^{(J)}, \dots, n_d^{(J)}\}$,
 см. рис. 1, где показаны три наложенные сетки. Каждая сетка, кроме $\omega^{(K)}$, состоит из левой и правой группы узлов. Соответствие индексов обеспечивает следующее правило соответствия ячеек: $n_a^{(i)} = 2n_b^{(i-1)} - 2$, $n_d^{(i)} = 2n_c^{(i-1)} + 2$ для $k = 1, \dots, K - 1$. При этом два крайних справа узла левой группы узлов более грубой сетки совпадают с соответствующими узлами более мелкой сетки, соответствующие значения неизвестной функции также отождествляем: $x_{n_b^{(j-1)}-1}^{(j-1)} = x_{n_b^{(j)}-2}^{(j)}$, $u_{n_b^{(j-1)}-1}^{(j-1)} = u_{n_b^{(j)}-2}^{(j)}$, $x_{n_b^{(j-1)}}^{(j-1)} = x_{n_b^{(j)}}^{(j)}$, $u_{n_b^{(j-1)}}^{(j-1)} = u_{n_b^{(j)}}^{(j)}$, $x_{n_c^{(j-1)}}^{(j-1)} = x_{n_c^{(j)}}^{(j)}$, $x_{n_c^{(j-1)}+1}^{(j-1)} = x_{n_b^{(j)}+2}^{(j)}$. Теперь запишем уравнение (39) для каждого внутреннего узла каждой из сеток $\omega^{(0)}, \dots, \omega^{(J)}$:

$$A_1^{(j\ddagger)}(x_{n-1}^{(j)}, t_m)u(x_{n-1}, t_m) + A_2^{(j\ddagger)}(u(x_n^{(j)}, t_m)) + A_3^{(j\ddagger)}u(x_{n+1}^{(j)}, t_m) + \\ + A_1^{(j\ddagger)}(x_{n-1}^{(j)}, t_{m-1})u(x_{n-1}, t_m) + A_2^{(j\ddagger)}(u(x_n^{(j)}, t_{m-1})) + A_3^{(j\ddagger)}u(x_{n+1}^{(j)}, t_{m-1}) = B_{m,n}, \quad (43)$$

$j \in \{0, \dots, J\}$, $n \in \{n_a^{(i)} + 1, \dots, n_b^{(i)} - 1\} \cup \{n_c^{(i)} + 1, \dots, n_d^{(i)} - 1\}$. Неизвестными в этой системе являются $u(x_{n_a^{(0)}}^{(0)}, t_m), \dots, u(x_{n_b^{(0)}-1}^{(0)}, t_m) = u(x_{n_a^{(1)}}^{(1)}, t_m)$, $u(x_{n_a^{(1)}+1}^{(1)}, t_m)$, $u(x_{n_b^{(0)}}^{(0)}, t_m) = u(x_{n_a^{(1)}+2}^{(1)}, t_m)$, ..., $u(x_{n_b^{(j)}-1}^{(j-1)}, t_m) = u(x_{n_a^{(j)}}^{(j)}, t_m)$, $u(x_{n_a^{(j)}+1}^{(1)}, t_m)$, $u(x_{n_b^{(j-1)}}^{(j-1)}, t_m) = u(x_{n_a^{(j)}+2}^{(j)}, t_m)$, ..., $u(x_{n_a^{(J)}}^{(J)}, t_m), \dots, u(x_{n_d^{(J)}}^{(J)}, t_m)$, ..., $u(x_{n_d^{(0)}}^{(0)}, t_m)$. К системе (43) следует также добавить граничные условия (40) и (41). При записи системы уравнений (43) мы учитываем, что у примыкающих областей сеток двух соседних пространственных уровней разрешения имеется ровно две общие ячейки, в которых решение имеет, естественно одинаковые значения на этих сетках. Так как система (43, 40, 41) является нелинейной относительно u , был применен итерационный метод. Решение на m слое для k -й итерации представляем в виде $u_{m,n}^{(k)} = u_{m,n}^{(k-1)} + \delta u_{m,n}^{(k-1)}$, итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока $\max(|\delta u_{m,n}^{(k-1)}|) > \delta$, $\delta > 0$ заданное число (определяет точность результата), $\delta \ll 1$. Этот подход позволяет линеаризовать $f(u, x)$ с помощью метода Ньютона:

$$f(u_{m,n}^{(k)}, x_n) = f(u_{m,n}^{(k-1)} + \delta u_{m,n}^{(k-1)}, x_n) + f(u_{m,n}^{(k-1)}, x_n) + f_u(u_{m,n}^{(k-1)}, x_n)\delta u_{m,n}^{(k-1)} + R,$$

R есть остаточный член. При численной реализации остаточный член опускаем,

$$f(u_{m+1,n}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n}^{(k-1)}, x_n) \simeq f(u_{m+1,n}^{(k-1)}, x_n) + f_u(u_{m+1,n}^{(k-1)}, x_n)\delta u_{m+1,n}^{(k-1)}.$$

Линейная система для одного итерационного шага имеет вид
 $\frac{1}{h_t}(u_{m+1,n}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n}^{(k-1)} - u_{m,n}) + \frac{V}{4h_x}(u_{m+1,n+1}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n+1}^{(k-1)} - u_{m+1,n-1}^{(k-1)} - \delta u_{m+1,n-1}^{(k-1)} + u_{m,n+1}^{(k-1)} - u_{m,n-1}^{(k-1)}) - \frac{\mu}{h_x^2 h_t}[u_{m+1,n-1}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n-1}^{(k-1)} - 2(u_{m+1,n}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n}^{(k-1)}) + u_{m+1,n+1}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n+1}^{(k-1)} - (u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1})] - \frac{k}{2h_x^2}[(u_{m+1,n-1}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n-1}^{(k-1)} - 2(u_{m+1,n}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n}^{(k-1)}) + u_{m+1,n+1}^{(k-1)} + \delta u_{m+1,n+1}^{(k-1)}) + (u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1})] = -f(u_{m+1,n}^{(k-1)}, x_n) - f_u(u_{m+1,n}^{(k-1)}, x_n)\delta u_{m+1,n}^{(k-1)}.$

Соберем отдельно слагаемые с $\delta u_{m+1,n}^{(k-1)}$:

$$A_{m,n}\delta u_{m,n-1}^{(k-1)} - B_{m,n}\delta u_{m,n}^{(k-1)} + C_{m,n}\delta u_{m,n+1}^{(k-1)} = -F_{m,n},$$

где коэффициенты $A_{m+1,n-1}$, $B_{m+1,n}$, $C_{m+1,n+1}$ являются известными, явные выражения не приводим. Далее реализуем метод прогонки [31] для $\delta u_{m+1,n}^{(k-1)}$. Во всех

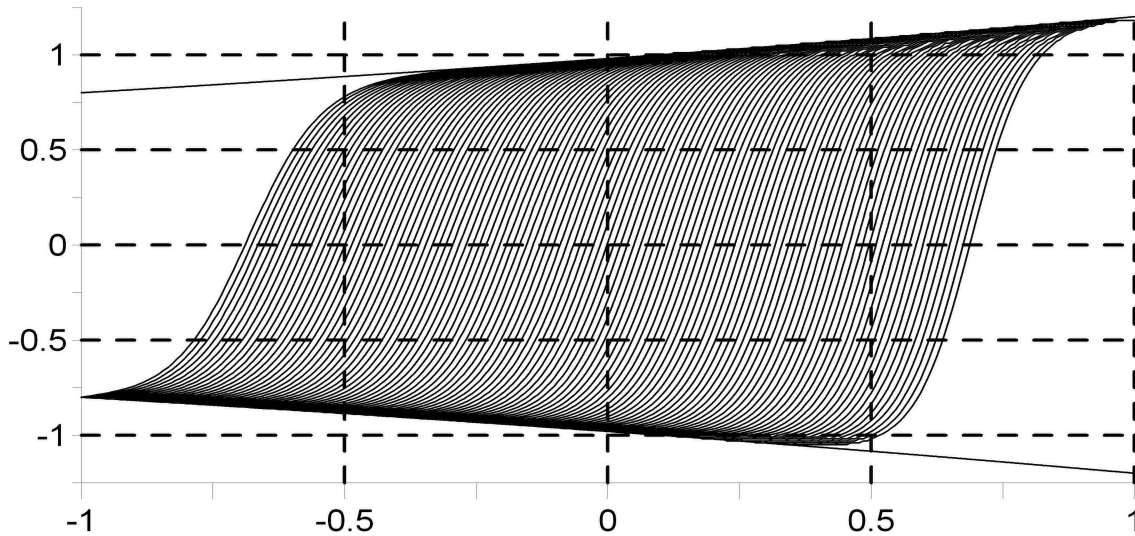


Рис. 2. Эволюция контрастной структуры для экспоненциального профиля уровня насыщения

Fig. 2. Contrasting structure evolution for the exponential saturation profile

приводимых далее результатах значение параметра критерия останова итерационного процесса ε выбрано так, чтобы были верны все значащие цифры приводимых числовых значений. Для графиков значение ε выбрано так, чтобы отличие точного результата от приводимого на графике не превышало видимой толщины линии графика. Оценка погрешности осуществлялась стандартными методами оценки точности решения разностной схемы итерационными методами, изложенными в книгах [31], [32], [33]. Были проведены также модельные расчеты для начально-краевых задач, для которых известно точное решение, в том числе для правой части вида $f(u, x) = \gamma(u - U_1)(u - U_2)(u - U_3)$ в однородном пространстве со сбалансированной и несбалансированной реакцией.

Мы провели сравнение рассчитанных аналитически в первых пяти порядках аппроксимации скорости дрейфа ВПС и скорости, найденной в численном эксперименте с использованием методики АС. Пусть $k = 1$, $\gamma = 1$, $\varepsilon^2 = 10^{-3}$, $U(x) = \exp(-x/100)$. При этих значениях параметров толщина ВПС при $x_0 = 0$ равна $\theta = \varepsilon \sqrt{2k/\gamma U^2} = \frac{1}{\sqrt{500}}$. В соответствии с (22), точное значение $W_0 = 0.03$ при $x_0 = 0$. Измеренное в численном эксперименте \hat{W}_0 отличается от указанного теоретического значения не больше чем на 10^{-7} при $-10 < x_0 < 10$.

На рис. 2 показана эволюция контрастной структуры для экспоненциального профиля: $U(x) = c_1 e^{(x - c_2)/c_3}$, $k = 1$, $\gamma = 1$, $\varepsilon^2 = 10^{-3}$, причем на промежутке $-1 < x < 1$ величина $U(x)$ возрастает от 0,8 до 1,2. Снимки сделаны через равные промежутки времени.

На рис. 3 показан пример численного решения задачи с наличием особых точек второго рода, показаны также функции $U(x)$ и $-U(x)$. Параметры задачи выбраны так, чтобы величина скорости градиентного дрейфа ВПС (22) и величина скорости в окрестности особой точки второго рода (точки скачка $U(x)$) были сравнимы. Можно заметить, что в окрестности каждой точки скачка скорость дрейфа ВПС

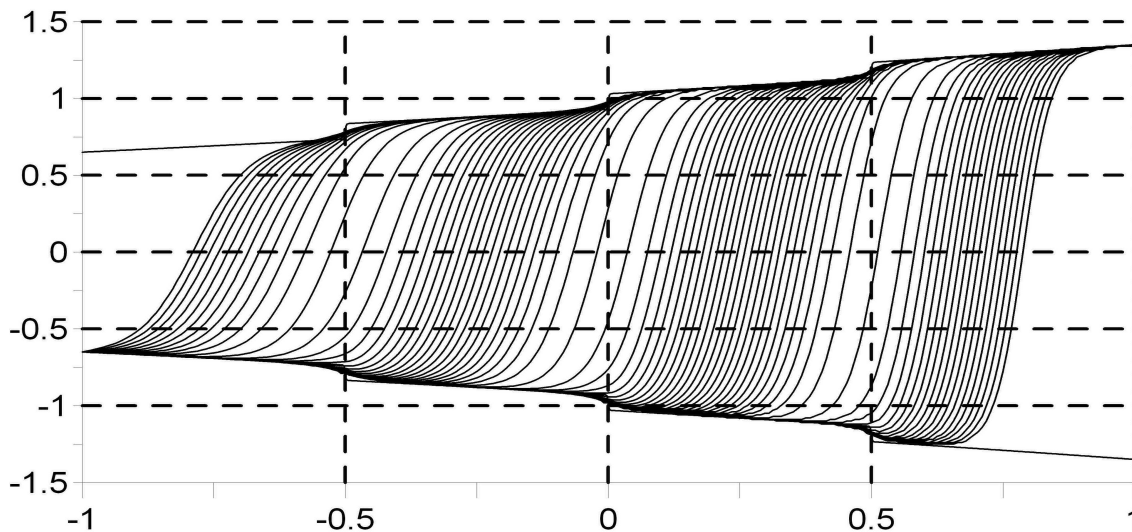


Рис. 3. Эволюция ВПС в среде с особыми точками второго рода
Fig. 3. The Interior Layer evolution for the case of first kind spesific points

увеличивается, но остается конечной, что полностью соответствует физической сути процесса реакции-адвекции-диффузии.

Таким образом, разработанный в данной статье метод адаптивных сеток для численного решения начально-краевой задачи для уравнения ОКПП с наличием внутреннего переходного слоя, а также для особенных случаев обращения скорости дрейфа первого порядка в нуль в некоторой точке промежутка (особая точка первого рода) и в бесконечность (особая точка второго рода) позволяет построить эффективный алгоритм решения практически важной задачи с априорно вычисляемой точностью.

Автор благодарен В. Ф. Бутузову и Н. Н. Нефедову за обсуждение результатов и ценные замечания.

Список литературы / References

- [1] Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, 2007; [Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., Pletner Ju. D., *Linejnye i nelinejnye uravnenija sobolevskogo tipa*, Fizmatlit, 2007, (in Russian).]
- [2] Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г., “О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **40**:8 (2000), 1237–1249; [Korpusov M. O., Pletner Ju. D., Sveshnikov A. G., “O kvazistacionarnyh processah v provodjashhих sredah bez dispersii”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoy fiziki*, **40**:8 (2000), 1237–1249, (in Russian).]
- [3] Корпусов М. О., Свешников А. Г., “О разрушении за конечное время решений начально-краевых задач для уравнений псевдопараболического типа с псевдолапласианом”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **45**:2 (2005), 272–286; [Korpusov M. O., Sveshnikov A. G., “O razrushenii za konechnoe vremja reshenij nachalno-kraevyh zadach dlja uravnenij psevdoparabolicheskogo tipa s psevdolaplassianom”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoy fiziki*, **45**:2 (2005), 272–286, (in Russian).]

- [4] Alshin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G., *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations*, De Gruyter, 2011.
- [5] Korpusov M. O., Sveshnikov A. G., “On blow up of generalized Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation”, *Nonlinear Analysis*, **71** (2009), 5724–5732.
- [6] Pao C. V., *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum, New York, 1992.
- [7] Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д., *Магнитные поля в астрофизике*, Ин-т хаотич. динам., Ижевск, 2006; [Zel’dovich Ya. B., Ruzmajkin A. A., Sokolov D. D., *Magnitnye polja v astrofizike*, In-t haotich. dinam., Izhevsk, 2006, (in Russian).]
- [8] Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., “Промежуточные асимптотики в математической физике”, *Успехи математических наук*, **26:2**(158) (1971), 115–129; [Barenblatt G. I., Zel’dovich Ya. B., “Promezhutochnye asimptotiki v matematicheskoy fizike”, *Uspehi matematicheskikh nauk*, **26:2**(158) (1971), 115–129, (in Russian).]
- [9] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, 2-е изд., Наука, М., 1978; [Rozhdestvenskii B. L., Yanenko N. N., *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics (Translations of Mathematical Monographs vol 55)*, American Mathematical Society, Providence, 1980, (in English).]
- [10] Мартинсон Л. К., Малов Ю. И., *Дифференциальные уравнения математической физики*, Изд-во МГТУ им. Баумана, Moscow, 2002; [Martinson L. K., Malov Ju. I., *Differencialnye uravnenija matematicheskoy fiziki*, Izd-vo MGTU im. Baumana, Moscow, 2002, (in Russian).]
- [11] Ikeda H., Mimura M., Tsujikawa T., “Singular Perturbation Approach to Travelling Wave Solutions of the Hodgkin–Huxley Equations and Its Application to Stability Problems”, *North–Holland Mathematics Studies*, **148** (1987), 1–73.
- [12] Давыдов А. С., *Биология и квантовая механика*, Наукова думка, Киев, 1979; [Davydov A. S., *Biology and quantum mechanics*, Pergamon, Oxford, 1982, (in English).]
- [13] Volpert V., Petrovskii S., “Reaction–diffusion waves in biology”, *Physics of Life Reviews*, **6** (2009), 267–310.
- [14] Kolmogorov A., Petrovsky I., Piskounoff N., “Etude de L’Equations de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique”, *Bull Univ. Moskou, Ser. Internat. 1A*, 1937, 1–25.
- [15] Ma W. X., Fuchssteiner B., “Explicit and exact solutions to a Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation”, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **31:3** (1996), 329–338.
- [16] Wei J., Yang J. Solutions with transition layers and spike in an inhomogeneous phase transition models, *J. Differential Equations*, **246** (2009), 3642–3667.
- [17] Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н., “Движение фронта в параболической задаче реакция – диффузия”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50:2** (2010), 276–285; [Bozhevol’nov Ju. V., Nefedov N. N., “Dvizhenie fronta v parabolicheskoy zadache reakcija – diffuzija”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoy fiziki*, **50:2** (2010), 276–285, (in Russian).]
- [18] Oran E., Boris J., *Numerical simulation of reactive flow*, Elsevier, N.Y., 1987.
- [19] Thompson J., Warsi Z., Mastin C., *Numerical Grid Generation. Foundations and Applications*, Elsevier Sci. Publ. Co., 1985.
- [20] Eiseman P. R., “Grid Generation for Fluid Mechanics Computations”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **17** (1985), 487–522.
- [21] Kolbe N. et al., “A study on time discretization and adaptive mesh refinement methods for the simulation of cancer invasion”, *Applied Mathematics and Computation*, **273** (2016), 353–376.
- [22] Philip B. et al. Dynamic implicit 3D adaptive mesh refinement for non-equilibrium radiation diffusion, *Journal of Computational Physics*, **262** (2014), 17–37.
- [23] Donat R. et al., “Well-Balanced Adaptive Mesh Refinement for shallow water flows”, *Journal of Computational Physics*, **257-A** (2014), 937–953.

- [24] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., “Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **4:3** (1998), 799–851; [Vasil’eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N., “Kontrastnye struktury v singuljarno vozmushhennyh zadachah.”, *Fundamental’naja i prikladnaja matematika*, **4:3** (1998), 799–851, (in Russian).]
 - [25] Быков А.А., Попов В.Ю., “О времени жизни одномерных нестационарных контрастных структур”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **309:2** (1999), 280–288; [Bykov A.A., Popov V.Ju., “O vremeni zhizni odnomernyh nestacionarnyh kontrastnyh struktur”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoy fiziki*, **309:2** (1999), 280–288, (in Russian).]
 - [26] Нефедов Н.Н., “Нестационарные контрастные структуры в системе реакция – диффузия”, *Математическое моделирование*, **4:8** (1992), 58–65; [Nefedov N.N., “Nestacionarnye kontrastnye struktury v sisteme reakcija – diffuzija”, *Matematicheskoe modelirovanie*, **4:8** (1992), 58–65, (in Russian).]
 - [27] Кожанов А.И., “Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником”, *Математические заметки*, **65:1** (1999), 70–75; [Kozhanov A.I., “Nachal’no-kraevaja zadacha dlja uravnenij tipa obobshhennogo uravnenija Bussineska s nelinejnym istochnikom”, *Matematicheskie zametki*, **65:1** (1999), 70–75, (in Russian).]
 - [28] Kufner A, Fucik S., *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, Oxford, N.Y., 1980.
 - [29] Быков А.А., Нефедов Н.Н., Шарло А.С., “Контрастные структуры для квазилинейного уравнения соболевского типа с несбалансированной нелинейностью”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **54:8** (2014), 1270–1280; [Bykov A.A., Nefedov N.N., Sharlo A.S., “Kontrastnye struktury dlja kvazioinejnogo uravnenija sobolevskogo tipa s nesbalansirovannoju nelinejnost’ju”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoy fiziki*, **54:8** (2014), 1270–1280, (in Russian).]
 - [30] Быков А.А., Шарло А.С., “Нестационарные контрастные структуры в окрестности с особой точки”, *Математическое моделирование*, **26:8** (2014), 107–125; [Bykov A.A., Sharlo A.S., “Nestacionarnye kontrastnye struktury v okrestnosti s osoboj točki”, *Matematicheskoe modelirovanie*, **26:8** (2014), 107–125, (in Russian).]
 - [31] Калиткин Н.Н., *Численные методы*, Наука, Moscow, 1978; [Kalitkin N.N., *Chislennye metody*, Nauka, M., 1978, (in Russian).]
 - [32] Самарский А.А., *Теория разностных схем*, Наука, Moscow, 1977; [Samarskij A.A., *Teorija raznostnyh shem*, Nauka, M., 1977, (in Russian).]
 - [33] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., *Численные методы*, Бином, Лаборатория знаний, 2003; [Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel’kov G.M., *Chislennye metody*, Binom, Laboratorija znaniy, 2003, (in Russian).]
 - [34] Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л., *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая Школа, М., 1987; [Samarskij A. A., Lazarov R. D., Makarov V. L., *Raznostnye shemy dlja differencialnyh uravnenij s obobshhennymi reshenijami*, Vysshaja Shkola, Moscow, 1987, (in Russian).]
 - [35] Fox L., *Numerical solution of ordinary and partial differential equations*, Oxford Press, Oxford, 1962.
 - [36] Lance G.N., *Numerical methods for high speed computers*, London, 1960.
-

Bykov A.A., "Numerical Scheme for the Pseudoparabolic Singularly Perturbed Initial-boundary Problem with Interior Transitional Layer", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23:3** (2016), 259–282.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-259-282

Abstract. Evolution equations are derived for the contrasting-structure-type solution of the generalized Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov (GKPP) equation with the small parameter with high order derivatives. The GKPP equation is a pseudoparabolic equation with third order derivatives. This equation describes numerous processes in physics, chemistry, biology, for example, magnetic field generation in a turbulent medium and the moving front for the carriers in semiconductors. The profile of the moving internal transitional layer (ITL) is found, and an expression for drift speed of the ITL is derived. An adaptive mesh (AM) algorithm for the numerical solution of the initial-boundary value problem for the GKPP equation is developed and rigorously substantiated. AM algorithm for the special point of the first kind is developed, in which drift speed of the ITL in the first order of the asymptotic expansion turns to zero. Sufficient conditions for ITL transitioning through the special point within finite time are formulated. AM algorithm for the special point of the second kind is developed, in which drift speed of the ITL in the first order formally turns to infinity. Substantiation of the AM method is given based on the method of differential inequalities. Upper and lower solutions are derived. The results of the numerical algorithm are presented.

Keywords: singularly perturbed equation, interior transitional layer, finite difference method, asymptotic expansion

On the authors:

Alexey A. Bykov, Doctor of Phys.-Math. Sciences, Department of Mathematics,
Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.
Moscow, 119991, Leninskiye gory, 1, b. 2, Russian Federation. E-mail: abkov@yandex.ru.

Acknowledgments:

This work was supported by RFBR, project 16-01-00690-a.